

文章编号: 1000-7598-(2003) 04-0565-04

变基床系数弹性地基梁解法及其应用

崔 奕¹, 姜忻良¹, 鲍 鹏²

(1. 天津大学建工学院 天津 300072; 2. 河南大学建工系 开封 475001)

摘 要: 从实测的 P - S 曲线(基地压力与沉降的关系)出发, 将 P - S 曲线拟合成分段线性函数, 把分段线性函数的斜率作为基床系数, 推导出变基床系数弹性地基梁的基本理论方程式, 并将它变换成与常基床系数弹性地基梁相同的方程形式, 从而, 可以用初参数法解出它的一般解。此方法可以推广到变截面梁和非均质地基的情况。

关 键 词: 文克尔假设; 分段线性; 变基床系数

中图分类号: TU 470 文献标识码: A

Computing method of elastic foundation beam with variable bedding value and its application

CUI Yi¹, JIANG Xin-liang¹, BAO Peng²

(1. School of Constructional Engineering, Tianjin University, Tianjin 300072, China;
2. Department of Constructional Engineering, Henan University, Kafeng 475001, China)

Abstract: Based on actual measured P - S curve, this article fits the curve to subsection linear function, and uses the slope of the function as bedding value. Then it derives the basic academic equation of variable bedding value elastic foundation beam; and changes it to the same equation form as constant bedding value elastic foundation beam. Having done that we can get the common results using the initial parameter method. This method can also be used in the case of variable cross-section beam and heterogeneous foundation.

Key word: Winkler's hypothesis; subsection linearity; variable bedding value

1 前 言

当前, 弹性地基梁的计算方法主要有基床系数法和弹性理论法两种。由于基床系数法计算方法简单, 故在工程实践上被广泛采用。基床系数法假定对同一地基的基床系数是相同的, 即地基压力与沉降关系为线性关系, 实际上, 在地基反力和沉降之间不存在线性关系, 因此, 基床系数法计算的结果是较粗略的。为改进计算结果的精度, 本文用分段线性来逼近地基反力与沉降的非线性关系, 提出了变基床系数的弹性地基梁解法。

2 变基床系数的确定

文克尔弹性地基模型中, 基底压力 P 与沉降 S 的关系为: $P = KS$, K 为地基土的基床系数。从图 1 中可以看出, K 值是随沉降值 S 的变化而变化的

(OA 段曲线), 在已有的资料中, 一般用割线 OA 代替曲线 OA , 割线的斜率作为基床系数 K 。如果将 P - S 曲线拟合成分段线性(用折线 OB - BA 代替割线 OA), 即用 K_1 , K_2 代替 K 值进行计算, 则更能符合实际情况。

3 变基床系数的弹性地基梁解法

当如图 2 所示的基床系数 K 不变时, 弹性地基梁的弹性曲线的微分方程为

$$EJ \frac{d^4 y}{dx^4} = -bKy + q \quad (1)$$

式中 E , J , b 分别为梁的弹性模量、截面惯性矩、梁的宽度; K 为基床系数; y 为沉降值; q 为梁上作用的均布荷载; x 为梁上计算截面到梁左端的距离。

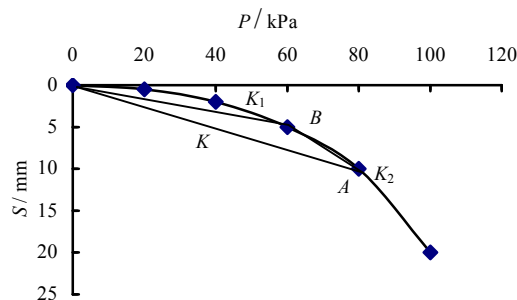


图 1 某地基土的 P - S 曲线
Fig. 1 The P - S curve of a foundation soil

先不考虑梁上均布荷载 q 时, 用初参数法^[1]得到其通解为

$$y(\beta x) = y_0 F_1(\beta x) + \frac{1}{\beta} \theta_0 F_2(\beta x) - \frac{1}{\beta^2 EJ} M_0 F_3(\beta x) - \frac{1}{\beta^3 EJ} Q_0 F_4(\beta x) \quad (2)$$

式中 y_0 , θ_0 , M_0 , Q_0 为梁左端的挠度、转角、弯矩和剪力; β 为梁的弹性特征值, F_1 , F_2 , F_3 , F_4 为克雷洛夫函数。由方程 (2) 可以推导出在任意荷载下梁的挠度方程, 再根据材料力学的有关公式就可以得到梁上各截面在任意荷载下的弯矩、剪力和基底压力的计算公式^[1]。其他符号意义见参考文献^[1]。

当基床系数 K 分段变化时(假设分为两段 K_1 与 K_2), 弹性地基梁的弹性曲线的微分方程为

$$EJ \frac{d^4 y}{dx^4} = -b(K_1 y_1 + K_2 y_2) + q \quad (3)$$

式中 y_1 , y_2 相应于基床系数为 K_1 , K_2 时的沉降值。由于 $y_2 = y - y_1$, 故式 (3) 可写为

$$EJ \frac{d^4 y}{dx^4} = -b[K_1 y_1 + K_2 (y - y_1)] + q = -bK_2 y + (K_2 - K_1) y_1 + q \quad (4)$$

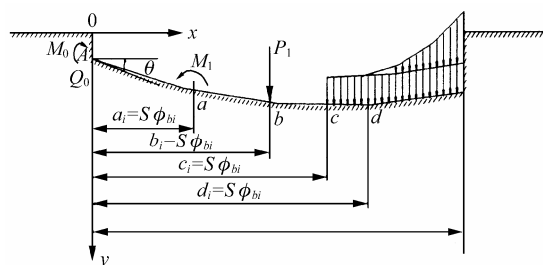


图 2 弹性地基有限长梁
Fig. 2 The limited length beam of elastic foundation

分析式 (4) 可以看出, K_1 , K_2 , y_1 均为常数, 且已知, 经分析, 可把它作为外荷载处理, 为此, 令广义均布荷载 $q^1 = (K_2 - K_1) y_1 + q$, 方程 (4) 变为

$$EJ \frac{d^4 y}{dx^4} = -bK_2 y + q^1 \quad (5)$$

经比较可以看出, 方程 (5) 与方程 (1) 有完全相同的形式, 因而, 变基床系数弹性地基梁就转换成了常基床系数弹性地基梁问题, 用初参数法即能得到解, 进而求得梁任意截面的内力与基底压力。具体计算步骤如下:

① 按实际地基土的 P - S 曲线, 根据问题的需要, 先定出 K_1 , 然后用 K_1 计算出地基梁各点的沉降值;

② 对照拟合后分段线性的 P - S 曲线, 确定沉降值落在 K_1 , K_2 内的范围, 据此将梁分段;

③ 分别用 K_1 , K_2 按基床系数不变的情况用变形协调条件^[1]计算出每段梁梁端弯矩和剪力, 然后计算出每段梁的沉降值: 在 K_1 段内, 基床系数为 K_1 , 均布荷载为 q , 在 K_2 段内, 基床系数为 K_2 , 均布荷载变为 q^1 。重复②, ③, 直至相邻两次的计算结果非常接近为止, 最后一次的计算结果即为最终值。根据上述原理, 可以得到采用多个基床系数时的理论公式

$$EJ \frac{d^4 y}{dx^4} = -bK_n y - b[(K_1 - K_n) y_1 + (K_2 - K_n) y_2 + \dots + (K_{n-1} - K_n) y_{n-1}] + q = -bK_n y + q^0 \quad (6)$$

因此, 只要有了某一地基的 P - S 曲线, 可按照精度要求情况, 将 P - S 曲线拟合为若干线性分段, 解方程式 (6), 可得到符合工程精度要求的地基梁的内力和基底压力。此方法还可以推广到变截面梁和非均质土上地基梁, 在本文算例 2 中计算了这种情况。

4 算例与讨论

按照上述理论与方法, 本文编制了可以计算常基床系数和变基床系数两种情况下的弹性地基梁的内力、基底反力和沉降, 也可以计算变截面梁或两种不同土质上梁^[2]的内力、基底反力和沉降的程序。

算例 1

图 3 所示的弹性地基梁, 梁长 10 m, 宽 0.5 m, 高 0.6 m, 弹性模量为 3×10^4 MPa, 截面惯性为 0.01 kN/m^3 , 集中荷载为 400 kN; 地基土的 P - S 曲线见图

1, 基床系数 $K_1=12\ 000\ \text{kN/m}^3$, $K_2=4\ 000\ \text{kN/m}^3$ 。

经过两次循环计算得到如下计算结果见图4~7。

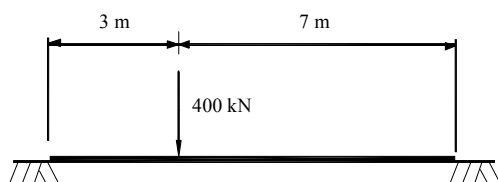


图3 弹性地基梁计算简图

Fig. 3 Calculation sketch for elastic foundation beam

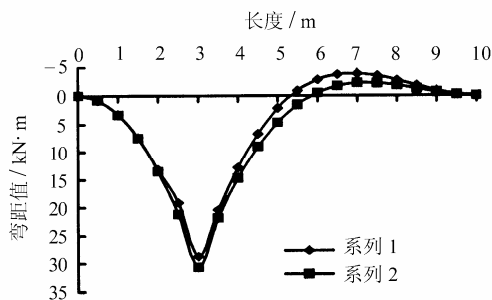


图4 弯矩图

Fig. 4 Bending moment diagram

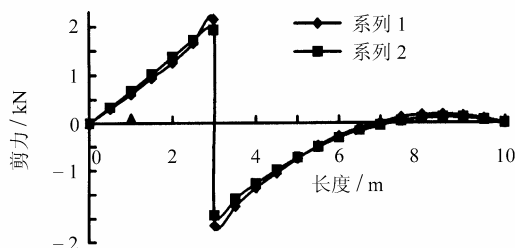


图5 剪力图

Fig. 5 Shearing force diagram

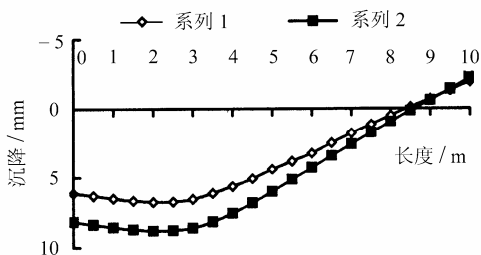


图6 沉降图

Fig. 6 Settlement diagram

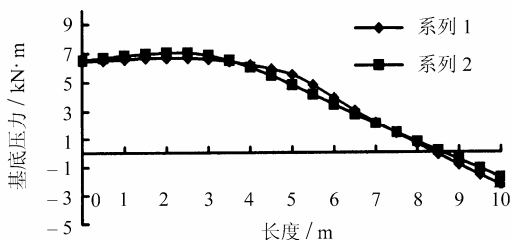


图7 基底压力图

Fig. 7 Base pressure diagram

计算结果中, 系列1为变基床系数情况下的计算结果, 系列2为常基床系数情况下的计算结果。不变基床系数的计算结果与图表法(文献[1])计算结果完全一致。由变基床系数和常基床系数计算结果可以看出, 两者还是有较大的差别。系列1的最大弯矩比系列2小10%, 而最大剪力大10%。

算例2

考虑天津地铁箱体明开挖段地基土不同的情况(如图8所示), 分析由于地基不均匀沉降对箱体产生的纵向应力。地铁箱体施工时分两次浇筑, 先浇底板及部分侧墙, 当强度达到设计值的70%时, 再浇筑剩余部分侧墙和顶板, 然后回填土、停止降水。综合明开挖施工情况, 经研究分析表明, 在回填土之前, 底板和部分侧墙形成的槽形截面梁承受上部侧墙和顶板重量的情况是施工和使用过程中的纵向受力最不利的情况。本算例中, 把上部侧墙和顶板的重量作为荷载作用在下部槽形截面梁上, 分析槽形截面梁纵向受力。

有关参数如下: C30 钢筋混凝土, 梁长100 m, 截面尺寸: 底板宽8 m, 厚0.8 m; 侧墙净高2 m, 厚0.6 m。截面惯性矩为 $4.56\ \text{m}^4$, 弹性模量为 $3 \times 10^4\ \text{MPa}$, 均布荷载 $60.63\ \text{kN/m}^2$, 梁下左侧土(土1)的基床系数 $K_{11}=9\ 000\ \text{kN/m}^3$, $K_{12}=3\ 000\ \text{kN/m}^3$, 梁下右侧土(土2)的基床系数 $K_{21}=12\ 000\ \text{kN/m}^3$, $K_{22}=4\ 000\ \text{kN/m}^3$ 。

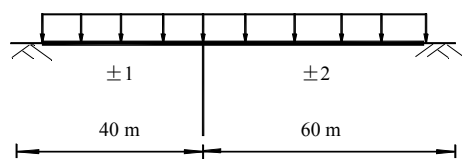


图8 天津地铁箱体槽形截面梁的受力简图

Fig. 8 Acting force sketch of channeled cross-section beam for Tianjin metro

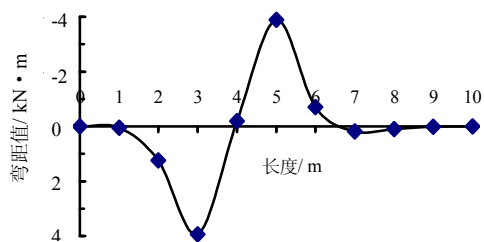


图 9 弯矩图

Fig. 9 Bending moment diagram

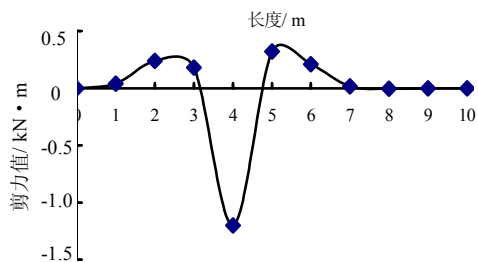


图 10 剪力图

Fig.10 Shearing force diagram

图 9、图 10 是经过三次循环得到的结果，最大弯矩为 396.3 kN/m，截面受拉区外缘应力为： $\sigma = 396.3 \times 0.78 / 4.56 = 67.78 \text{ kN/m}^2$ ， $< [\sigma] = 1500 \text{ kN/m}^2$ ，底板不会有裂缝产生。为此得出在天津地铁箱体明开挖段的设计中一般可不验算纵向受力的结论。

参 考 文 献

- [1] 中国船舶工业总公司第九设计研究院，弹性地基梁及矩形板计算[M]，北京：国防工业出版社，1975.
- [2] Leonardo Zeevaert, Foundation Engineering For Difficult Subsoil Condition, Van Nostrand Reinhold Company, 1973.
- [3] 西姆乌利基 H A 著，李天配译，弹性地基上工程结构计算[M]，北京：人民出版社，1991.